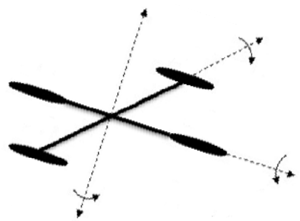
9장 벡터의 미적분
(2)



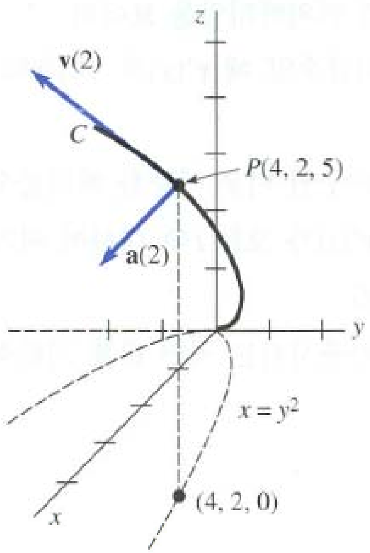
- 곡선운동

$$\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=f'(t)\mathbf{i}+g'(t)\mathbf{j}+h'(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)=f''(t)\mathbf{i}+g''(t)\mathbf{j}+h''(t)\mathbf{k}$$

속력 (=속도의 크기) $\|\mathbf{v}(t)\| = \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$



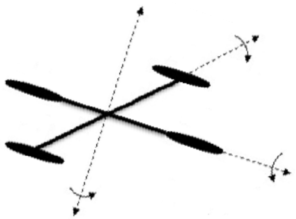
예제 1 속도벡터와 가속도벡터

움직이는 물체의 위치가 $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j}+\frac{5}{2}t\mathbf{k}$로 주어진다. $\mathbf{r}(t)$로 정의되는 곡선을 그리고 벡터 $\mathbf{v}(2)$와 $\mathbf{a}(2)$를 함께 나타내라.

풀이 $x=t^2$, $y=t$이므로 물체의 경로는 포물선 $x=y^2$이다. $t=2$일 때 위치벡터 $\mathbf{r}(2)=4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$는 물체가 점 $P(4, 2, 5)$에 위치한다는 것을 나타낸다.

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=2t\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+\frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{그리고} \quad \mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)=2\mathbf{i}$$

이므로 $\mathbf{v}(2)=4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\frac{5}{2}\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(2)=2\mathbf{i}$이고 이들은 그림 9.7에 나와 있다. ❑



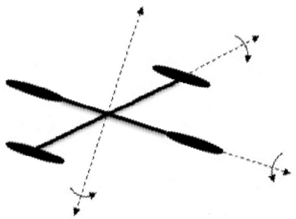
일정한 속력을 가진다면 가속도벡터와 속도벡터는 서로 수직이다.

$$\|\mathbf{v}\|=c \rightarrow \|\mathbf{v}\|^2=c^2 \rightarrow \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=c^2$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 2\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 0$$

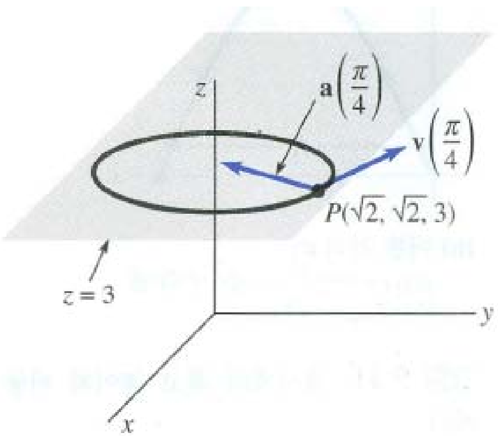
$$\boxed{\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = 0}$$ → 수직



예제 2 속도벡터와 가속도벡터

9.1절 예제 2의 벡터함수는 원형 궤도를 움직이는 물체의 위치를 나타낸다. $t=\pi/4$에서 속도와 가속도를 그리라.

풀이 $\mathbf{r}(t)=2\cos t\mathbf{i}+2\sin t\mathbf{j}+3\mathbf{k}$는 평면 $z=3$ 위에서 반지름 2인 원형 궤도를 따라 움직이는 물체의 위치벡터이다. $t=\pi/4$일 때 물체는 점 $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$에 위치하며

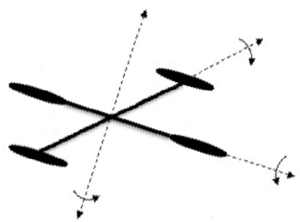


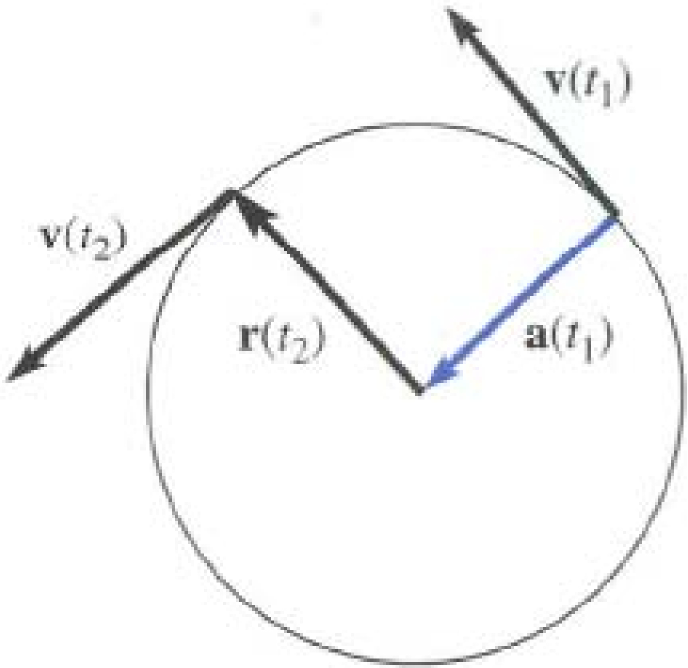
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2\cos t\,\mathbf{i} - 2\sin t\,\mathbf{j}$$

이다. 모든 t에 대하여 $\|\mathbf{v}(t)\|=2$이므로 $\mathbf{a}(t)$는 $\mathbf{v}(t)$에 수직이다.(검증하라.) 벡터

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + 2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} - 2\sin\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$$

가 그림 9.8의 점 P에 그려져 있다. 벡터 $\mathbf{v}(\pi/4)$는 원형 궤도에 접하고 $\mathbf{a}(\pi/4)$는 원의 중심을 향하는 반지름 방향을 가리킨다. ❑



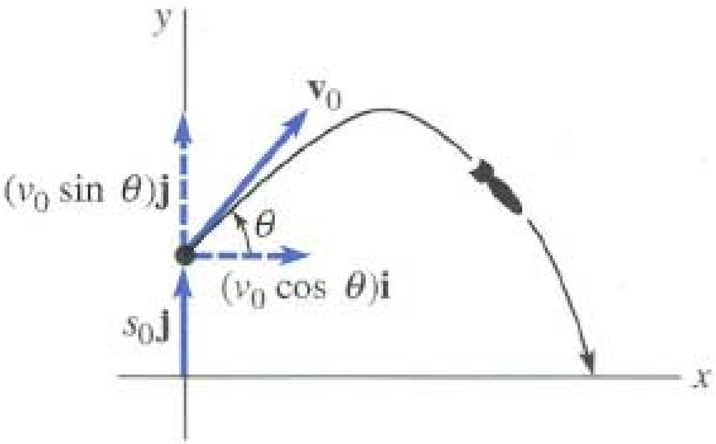


$$\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t \mathbf{i} + r_0 \sin \omega t \mathbf{j}$$

위치와 가속도벡터의 방향이 반대

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}'' = -\omega^2 \mathbf{r}$$

구심가속도
(centripetal acceleration)



$$\mathbf{v}(t) = \int (-g\mathbf{j})\, dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{c}_1$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_0$$

초기 높이 $\mathbf{s}_0 = s_0\mathbf{j}$

초기 속도 $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\ \theta\mathbf{i} + v_0 \sin\ \theta\mathbf{j}$

$$\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos\ \theta)\mathbf{i} + (-gt + v_0 \sin\ \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos\ \theta)t\mathbf{i} + \left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + s_0\right]\mathbf{j}$$

$$\boxed{x(t) = (v_0 \cos\ \theta)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\ \theta)t + s_0}$$

예제 3 포탄의 탄도

포탄이 지표면에서 초기 속력 768 ft/s, 수평 방향에 대해 30°의 각도로 발사된다. (a) 포탄의 탄도를 나타내는 벡터함수와 매개정식, (b) 포탄이 도달하는 최고 높이, (c) 포탄이 이동하는 수평 거리, (d) 다시 지표면에 떨어질 때의 속력을 구하라. 단 중력가속도는 $g=32$ ft/s^{2}이다.

(a) 먼저 $\mathbf{s}_0=0$이므로

$$\mathbf{v}_0 = (768\cos 30°)\mathbf{i} + (768\sin 30°)\mathbf{j} = 384\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 384\,\mathbf{j} \tag{2}$$

이고 $\mathbf{a}(t)=-32\mathbf{j}$를 적분하고 (2)를 이용하면

$$\mathbf{v}(t) = (384\sqrt{3})\mathbf{i} + (-32t + 384)\mathbf{j} \tag{3}$$

를 얻는다. (3)을 다시 적분하면 탄도를 나타내는 벡터함수는

$$\mathbf{r}(t) = (384\sqrt{3}t)\mathbf{i} + (-16t^2 + 384t)\mathbf{j}$$

이고, 따라서 탄도의 매개방정식은

$$x(t) = 384\sqrt{3}t, \quad y(t) = -16t^2 + 384t \tag{4}$$

(b) (4)에서 $-32t+384=0$, 즉 $t=12$일 때 $dy/dt=0$이다. 따라서 포탄의 최고 높이는

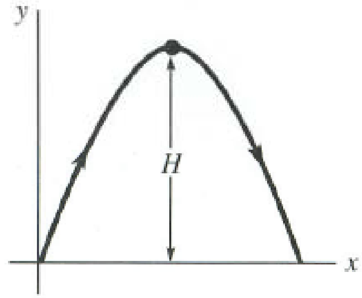
$$H = y(12) = -16(12)^2 + 384(12) = 2304 \text{ ft}$$

(c) (4)에서 $-16t(t-24)=0$, 즉 $t=0, 24$일 때 $y(t)=0$이므로 수평 거리 R은

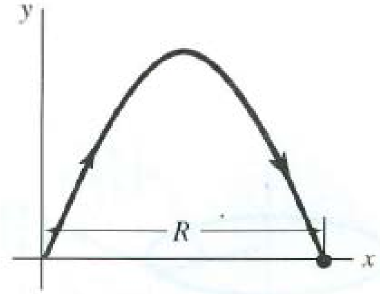
$$R = x(24) = 384\sqrt{3}(24) \approx 15{,}963 \text{ ft}$$

(d) (3)에서 포탄이 다시 지표면에 떨어질 때의 속력은

$$\|\mathbf{v}(24)\| = \sqrt{(-384)^2 + (384\sqrt{3})^2} = 768 \text{ ft/s}$$



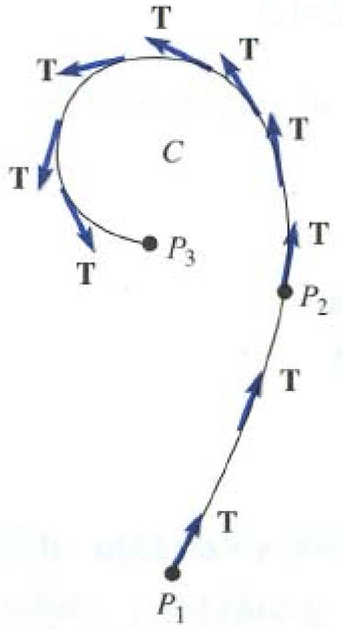
(a) 최고 높이 $\boldsymbol{H}$:
$y'(t_1)=0$인 t_1을 구하면
$H = y_{\max} = y(t_1)$



(b) 이동 거리 $\boldsymbol{R}$:
$y(t_1)=0$인 $t_1>0$을 구하면
$R = x_{\max} = x(t_1)$

그림 9.11 발사체의 최고 높이와 이동 거리

- 곡률



단위접선벡터 $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$

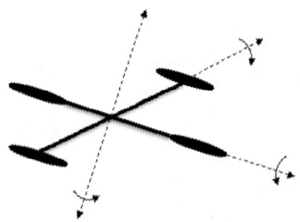
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$ 따라서 $$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \mathbf{T}$$

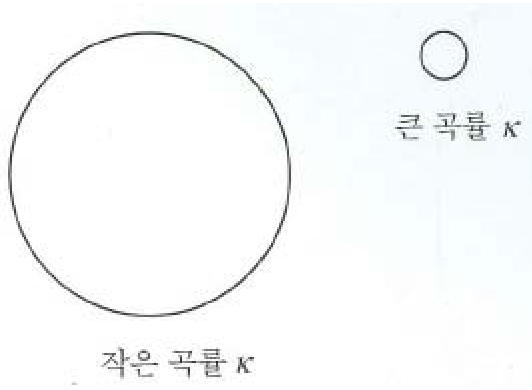
정의 9.4 **곡률**

$\mathbf{r}(t)$가 매끄러운 곡선 C를 정의하는 벡터함수이고 s가 호의 길이, $\mathbf{T}=d\mathbf{r}/ds$가 곡선의 단위접선벡터이면, 곡선 C의 한 점에서의 곡률은

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \tag{3}$$

이다.





예제 1 원의 곡률

반지름 a인 원의 곡률을 구하라.

풀이 원은 벡터함수 $\mathbf{r}(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}$로 기술된다. $\mathbf{r}'(t)=-a\sin t\mathbf{i}+a\cos t\mathbf{j}$와 $\|\mathbf{r}'(t)\|=a$로부터

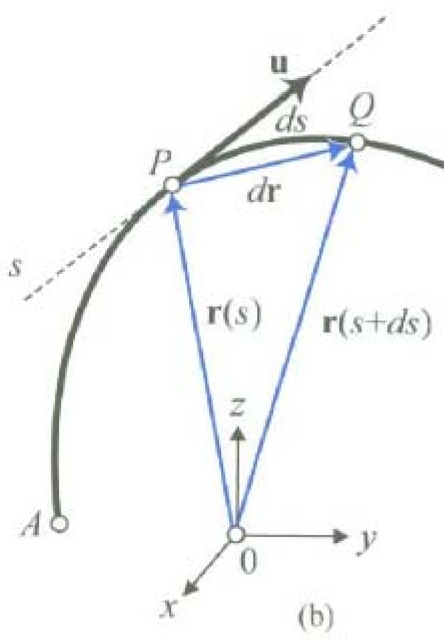
$$\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}=-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j} \quad \text{그리고} \quad \mathbf{T}'(t)=-\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}$$

를 얻는다. 따라서 (4)로부터 곡률은

$$\kappa=\frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}=\frac{\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}}{a}=\frac{1}{a} \tag{5}$$

- 가속도의 접선성분과 법선성분

5. 속도와 가속도



P의 속도 $v = \frac{ds}{dt}$

$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$

$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right) = \mathbf{u}v$

속도벡터 $\mathbf{v} = \mathbf{r}' = \mathbf{u}v$

가속도벡터 $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = \mathbf{r}''$

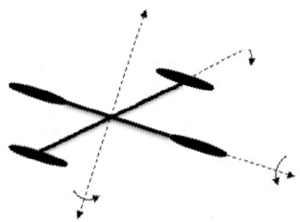
$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (v\mathbf{u})' = v'\mathbf{u} + \mathbf{u}'v$$

$$\mathbf{u}'v = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)v = \left(\frac{d\mathbf{u}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)v = \frac{d\mathbf{u}}{ds}v^2$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{n}\frac{|d\mathbf{u}|}{ds} = \mathbf{n}\frac{1}{\rho}$$

크기가 일정한 벡터의 미분은 자기자신과 직교한다.

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\mathbf{u}}{ds}\right|$$



가속도벡터 $\mathbf{a} = \mathbf{u}\dfrac{dv}{dt} + \mathbf{n}\dfrac{v^2}{\rho} = a_t\mathbf{u} + a_n\mathbf{n}$

단위 주 법선 벡터 (principle norm)

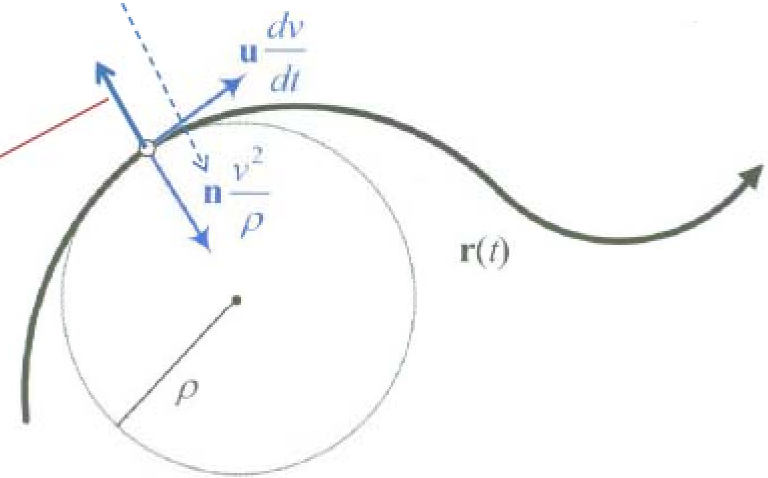
곡률반지름

접선가속도

법선가속도
(구심가속도)

곡률 curvature $\dfrac{1}{\rho} = \left|\dfrac{d\mathbf{u}}{ds}\right|$

원심가속도



$$\mathbf{a} = \mathbf{u}\frac{dv}{dt} + \mathbf{n}\frac{v^2}{\rho} = a_t\mathbf{u} + a_n\mathbf{n} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{r}' = \mathbf{u}v$$

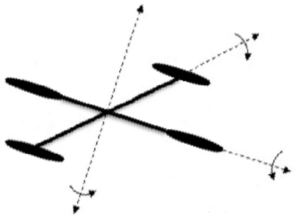
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v\mathbf{u}\cdot(a_t\mathbf{u} + a_n\mathbf{n}) = va_t$$

$$a_t = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}|}$$

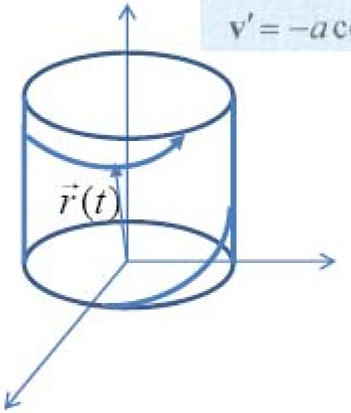
$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = v\mathbf{u}\times(a_t\mathbf{u} + a_n\mathbf{n}) = va_n(\mathbf{u}\times\mathbf{n})$$

$$a_n = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{v} = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{v}'|}{|\mathbf{v}|}$$

$$\boxed{a_t = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}|}, \quad a_n = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{v}'|}{|\mathbf{v}|}}$$



예제) 원나선의 단위접선벡터, 주법선벡터, 곡률을 구하라.



$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = -a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}' = -a\cos t\mathbf{i} - a\sin t\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + c^2}$$
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}' = a^2\sin t\cos t - a^2\sin t\cos t = 0$$
$$\mathbf{v}\times\mathbf{v}' = ac(\sin t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j}) + a^2\mathbf{k}$$

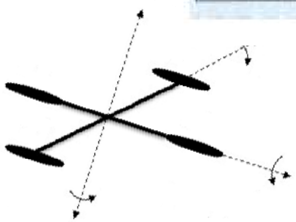
$$\mathbf{u}' = \frac{-a\cos t\mathbf{i} - a\sin t\mathbf{j}}{\sqrt{a^2+c^2}}, \quad |\mathbf{u}'| = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

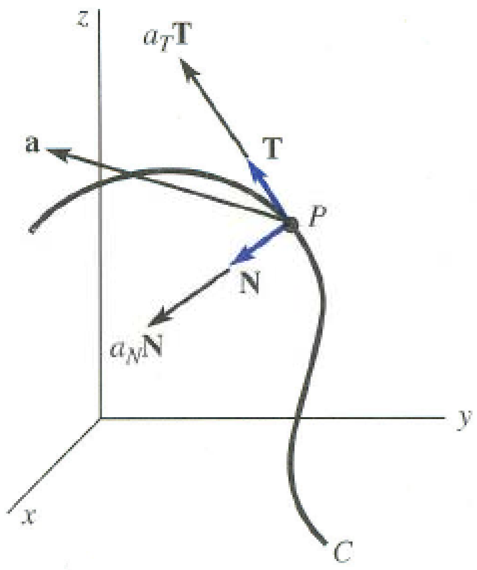
$$a_n = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{v}'|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|ac(\sin t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j}) + a^2\mathbf{k}|}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}} = a$$

$$\boxed{\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{-a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k}}{\sqrt{a^2+c^2}}}$$

$$\boxed{\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|} = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{a_n}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{a}{a^2+c^2}}$$



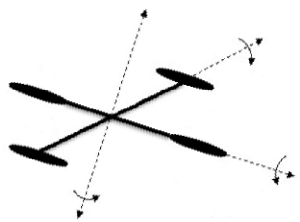


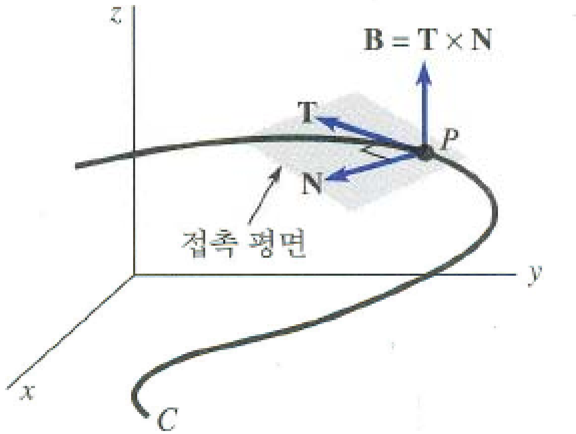
가속도벡터 $\mathbf{a}(t) = v\dfrac{d\mathbf{T}}{dt} + \dfrac{dv}{dt}\mathbf{T}$

주법선벡터 $\mathbf{N} = \dfrac{d\mathbf{T}/dt}{\|d\mathbf{T}/dt\|}$

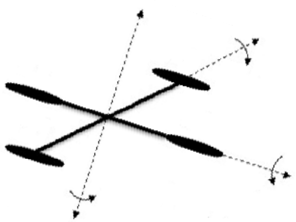
$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \kappa v^2\mathbf{N} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{a}(t) = a_N\mathbf{N} + a_T\mathbf{T}$$





종법선벡터 $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$



예제 2 접선, 법선, 종법선 벡터

움직이는 물체의 위치가 $\mathbf{r}(t)=2\cos t\mathbf{i}+2\sin t\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$로 주어진다. 벡터 $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$와 곡률을 구하라.

풀이 $\mathbf{r}'(t)=-2\sin t\mathbf{i}+2\cos t\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\|\mathbf{r}'(t)\|=\sqrt{13}$ 이므로 (1)에서 단위접선벡터는

$$\mathbf{T}=-\frac{2}{\sqrt{13}}\sin t\,\mathbf{i}+\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathbf{j}+\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{k}$$

이고

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=-\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathbf{i}-\frac{2}{\sqrt{13}}\sin t\,\mathbf{j} \quad \text{그리고} \quad \left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\|=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

이므로 (3)에서 주법선

$$\mathbf{N}=-\cos t\,\mathbf{i}-\sin t\,\mathbf{j}$$

를 얻는다. 종법선은

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\sin t & \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t & \frac{3}{\sqrt{13}}\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{13}}\sin t\,\mathbf{i}-\frac{3}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathbf{j}+\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}$$

이다. 마지막으로 $\|d\mathbf{T}/dt\|=2/\sqrt{13}$, $\|\mathbf{r}'(t)\|=\sqrt{13}$ 이므로 (4)에서 임의의 점에서의 곡률은 일정한 값

$$\kappa=\frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=\frac{2}{13}$$

이다. ❑

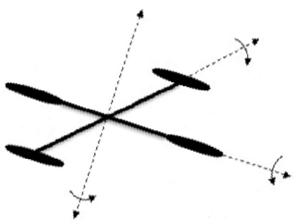
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = a_N\underbrace{(v\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})}_{0} + a_T\underbrace{(v\mathbf{T}\cdot\mathbf{T})}_{1} = a_T v \quad \leftarrow \quad \mathbf{v}=v\mathbf{T}$$

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}}$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = a_N\underbrace{(v\mathbf{T}\times\mathbf{N})}_{\mathbf{B}} + a_T\underbrace{(v\mathbf{T}\times\mathbf{T})}_{0} = a_N v\mathbf{B} \quad \leftarrow \quad \|\mathbf{B}\|=1$$

$$\boxed{a_N = \kappa v^2 = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}}$$



예제 3 뒤틀린 3차곡선의 곡률

벡터 $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\frac{1}{2}t^2\mathbf{j}+\frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$가 그리는 곡선을 '뒤틀린 3차곡선(twisted cubic)'이라고 한다. 움직이는 물체의 위치벡터가 $\mathbf{r}(t)$일 때 임의의 t에 대하여 가속도의 접선성분, 법선성분, 곡률을 구하라.

풀이 $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)=\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$이다. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}=t+2t^3$, $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{1+t^2+t^4}$이므로 (10)에서

$$a_T=\frac{dv}{dt}=\frac{t+2t^3}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

이다. 한편

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & t & t^2\\ 0 & 1 & 2t\end{vmatrix}=t^2\mathbf{i}-2t\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

에서 $\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|=\sqrt{t^4+4t^2+1}$이므로 (11)에서

$$a_N=\kappa v^2=\frac{\sqrt{t^4+4t^2+1}}{\sqrt{1+t^2+t^4}}=\sqrt{\frac{t^4+4t^2+1}{t^4+t^2+1}}$$

이다. 뒤틀린 3차곡선의 곡률은 (12)로부터

$$\kappa=\frac{(t^4+4t^2+1)^{1/2}}{(t^4+t^2+1)^{3/2}}$$