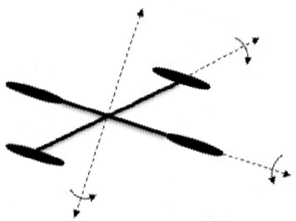
8장 Matrice -2



- 행렬식

정의 8.9 2×2 행렬의 행렬식

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 의 행렬식은 다음과 같다.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

정의 8.10 3×3 행렬의 행렬식

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 의 행렬식은 아래와 같다.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{3}$$

정리 8.7 행렬식의 여인수 전개

$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$이 $n\times n$인 행렬이라 하자. 각 $1 \le i \le n$에 대하여 **i번째 행을 따라 여인수 전개**를 하면 아래와 같다.

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

각 $1 \le j \le n$에 대하여 **j번째 열에 따라 여인수 전개**를 하면 다음과 같다.

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$n \times n$ 행렬

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}}$$

M_{ij}는 $\mathbf{A}$의 i번째 행과 j번째 열을 제거하여 구한 부분행렬의 행렬식

예제 1 1행에 따라 여인수 전개

다음 행렬의 행렬식을 구하라.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2C_{11} + 4C_{12} + 7C_{13}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 7(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2[0(3) - 3(5)] - 4[6(3) - 3(1)] + 7[6(5) - 0(1)] = 120$$

예제 2 3열에 따라 여인수 전개

다음 행렬식의 값을 구하라.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

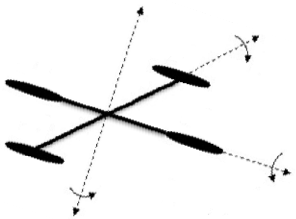
풀이 3열에 0이 2개 있으므로, 이 열에 따라 여인수를 전개한다.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0C_{13} + (-7)C_{23} + 0C_{33}$$

$$= (-7)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-7)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 7[6(4) - 5(-2)] = 238$$

❑

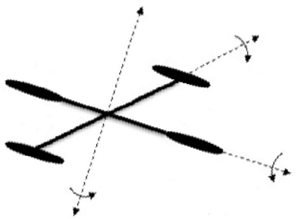


예제 3 4행에 따라 여인수 전개

다음 행렬의 행렬식을 구하라.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)C_{41} + 0C_{42} + 0C_{43} + (-4)C_{44}$$



$$C_{41} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\left(0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 18$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \left((-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -4$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)(18) + (-4)(-4) = 34$$

정리 8.8 **전치행렬의 행렬식**

$\mathbf{A}^T$이 $n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$의 전치이면, $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$이다.

정리 8.9 **두 개의 같은 행**

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$의 임의의 두 행(또는 열)이 같으면, $\det \mathbf{A} = 0$이다.

예제 1 **두 개의 같은 행을 가진 행렬**

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$는 두 번째 열과 세 번째 열이 같기 때문에 정리 8.9로부터 아래의 행렬식이 성립한다.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

여인수로 행렬식을 전개하여 이를 검증해 보라. ❑

정리 8.10 영 행 또는 영 열

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$의 한 행(열)에 있는 모든 원소가 0이면, $\det \mathbf{A} = 0$이다.

정리 8.11 행의 교환

$\mathbf{B}$가 $n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$의 임의의 두 행(또는 열)을 서로 교환하여 얻은 행렬이라 하면, $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$이다.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\det \mathbf{A}$$

정리 8.12 행의 상수 배

$\mathbf{B}$가 $n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$의 한 행(또는 열)에 0이 아닌 실수 k를 곱하여 얻어진 행렬이라 하면, $\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$이다.

증명 $\mathbf{A}$의 i행에 있는 원소에 수 k를 곱하였다고 하자. 그 결과 얻은 행렬을 $\mathbf{B}$라 하자. $\det \mathbf{B}$를 i행에 따라 여인수로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\det \mathbf{B} &= ka_{i1}C_{i1} + ka_{i2}C_{i2} + \cdots + ka_{in}C_{in} \\ &= k\underbrace{(a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in})}_{i\text{번째 행을 따라 여인수로 } \det \mathbf{A}\text{를 전개}} = k \det \mathbf{A}\end{aligned}$$

❑

예제 2 정리 8.12와 정리 8.9

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 20 & 16 \end{vmatrix} = 5\overset{\substack{\text{첫째}\\ \text{열에서}\\ \downarrow}}{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix}} = 5 \cdot 8\overset{\substack{\text{둘째}\\ \text{열에서}\\ \downarrow}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = 5 \cdot 8 \cdot 2\overset{\substack{\text{셋째}\\ \text{열에서}\\ \downarrow}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 80(1-2) = -80$$

$$\text{(b)}\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{둘째 열에서}\\ \downarrow}}{=} (-2)\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{정리 8.9에서}\\ \downarrow}}{=} (-2) \cdot 0 = 0$$

❑

정리 8.13　　행렬곱의 행렬식

A 와 **B** 가 모두 $n \times n$ 행렬이면, $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$ 이다.

예제 3　행렬곱의 행렬식

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ 라면, $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -12 & 22 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ 이다. 이제 $\det \mathbf{AB} = -24$, $\det \mathbf{A} = -8$, $\det \mathbf{B} = 3$ 이다. 따라서 다음과 같다.

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = (-8)(3) = -24 = \det \mathbf{AB}$$ ❑

정리 8.14　행렬식은 변하지 않는다

$\mathbf{B}$가 $n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$의 한 행(또는 열)에 0이 아닌 실수 k를 곱하고 이 결과를 다른 행(또는 열)에 더하여 얻은 행렬이라 하자. 그러면 $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$이다.

예제 4　행의 상수곱을 다른 행에 더함

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$라 하고, 행렬 $\mathbf{B}$는 아래와 같은 기본 행 연산에 의하여 $\mathbf{A}$에서 얻은 행렬이라고 하자.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{-3R_1 + R_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ -11 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

2열에 따라 여인수로 전개하여, $\det \mathbf{A} = 45$와 $\det \mathbf{B} = 45$를 구한다. 이 결과를 검증해 보라. ❑

정리 8.15 **삼각행렬의 행렬식**

$\mathbf{A}$를 $n \times n$ 삼각행렬(위 삼각 또는 아래 삼각)이라 하면, 행렬식은 아래와 같다.

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

여기서 $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$은 $\mathbf{A}$의 주대각선 상의 원소이다.

증명 3×3인 아래 삼각행렬 $\mathbf{A}$에 대하여 이 결과를 증명하자.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{A}$를 1행에 따라 여인수로 전개하면 다음과 같다.

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - 0 \cdot a_{32}) = a_{11}a_{22}a_{33} \qquad \square$$

예제 5 삼각행렬의 행렬식

(a) 아래 삼각행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 의 행렬식은 아래와 같다.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot (-4) \cdot (-2) = 144$$

(b) 대각행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 의 행렬식은 아래와 같다.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 6 \cdot 4 = -72$$

예제 6 삼각꼴로 축소한 행렬식

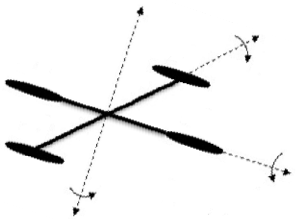
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ 의 행렬식의 값을 구하라.

풀이

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{(2는 셋째 행의 공통인수: 정리 8.12)}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} \qquad \text{(첫 행과 셋째 행의 교환: 정리 8.11)}$$



$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 18 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{(첫 행을 4배 하여 둘째 행에 더함: 정리 8.14)}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -10 & -17 \end{vmatrix} \quad \text{(첫 행을 }-6\text{배 하여 셋째 행에 더함: 정리 8.14)}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 19 \end{vmatrix} \quad \text{(둘째 행을 2배 하여 셋째 행에 더함: 정리 8.14)}$$

$$= (-2)(1)(5)(19) = -190 \quad \text{(정리 8.15)}$$

❑

정리 8.16 여인수의 성질

$\mathbf{A}$가 $n \times n$ 행렬이라 하자. $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$이 i행의 원소라 하고 $C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{kn}$이 k행의 원소들의 여인수라 하면

$$a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn} = 0 \quad \text{단 } i \neq k$$

이다. $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$가 j열의 원소이고 $C_{1k}, C_{2k}, \ldots, C_{nk}$가 k열에 있는 원소들의 여인수라 하면, 다음과 같다.

$$a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + \cdots + a_{nj}C_{nk} = 0 \qquad \text{단 } j \neq k$$

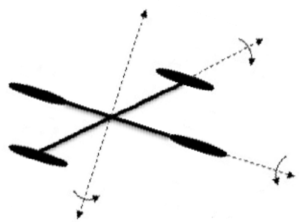
증명 행들에 대한 결과를 증명하자. $\mathbf{B}$를 $\mathbf{A}$의 i행의 원소를 k행의 원소와 같게 놓아 $\mathbf{A}$로부터 얻은 행렬이라 하자. 즉 $a_{i1}=a_{k1}, a_{i2}=a_{k2}, \ldots, a_{in}=a_{kn}$이다. $\mathbf{B}$는 같은 두 행을 가지므로 정리 8.9로부터 $\det \mathbf{B}=0$이다. 이때 k행에 따라 여인수 전개를 하면, 원하는 결과가 나온다.

$$\begin{aligned} 0 = \det \mathbf{B} &= a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \cdots + a_{kn}C_{kn} \\ &= a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn} \end{aligned}$$ ❑

EXAMPLE 3 **Determinant of a Triangular Matrix**

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \cdot 5 = -60.$$

Inspired by this, can you formulate a little theorem on determinants of triangular matrices? Of diagonal matrices?



EXAMPLE 4 **Evaluation of Determinants by Reduction to Triangular Form**

Because of Theorem 1 we may evaluate determinants by reduction to triangular form, as in the Gauss elimination for a matrix. For instance (with the blue explanations always referring to the ***preceding determinant***)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{Row 2} - 2 \text{ Row 1} \\ \\ \text{Row 4} + 1.5 \text{ Row 1} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & -11.4 & 29.2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Row 3} - 0.4 \text{ Row 2} \\ \text{Row 4} - 1.6 \text{ Row 2} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & -0 & 47.25 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{Row 4} + 4.75 \text{ Row 3} \end{array}$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 2.4 \cdot 47.25 = 1134.$$