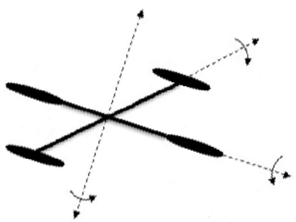
Laplace Transform



Definition of the Laplace Transform

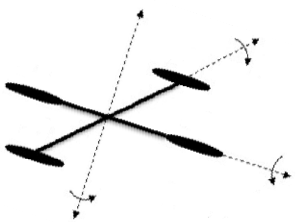
DEFINITION 4.1 Laplace Transform

Let f be a function defined for $t \geq 0$. Then the integral

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (2)$$

is said to be the **Laplace transform** of f, provided the integral converges.

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s), \qquad \mathscr{L}\{g(t)\} = G(s), \qquad \mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s).$$



예제 1 정의 4.1의 사용

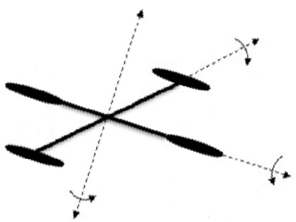
$\mathscr{L}\{1\}$을 구하라.

풀이 (2)로부터, $s > 0$일 경우

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(1)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-sb}+1}{s} = \frac{1}{s}$$

이다. 다시 말하여, $s > 0$일 경우 $-sb < 0$이고 $b \to \infty$에 따라 $e^{-sb} \to 0$이 된다. $s < 0$일 경우는 발산한다. ❑



예제 2 정의 4.1 의 사용

$\mathscr{L}\{t\}$을 구하라.

풀이 정의 4.1 로부터 $\mathscr{L}\{t\}=\int_0^\infty e^{-st}t\,dt$임을 알 수 있고, 예제 1 의 결과와 더불어 부분적분과 $s>0$일 때 $\lim_{t\to\infty} te^{-st}=0$임을 이용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{-te^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$ ❑

예제 3 정의 4.1 의 사용

$\mathscr{L}\{e^{-3t}\}$을 구하라.

풀이 정의 4.1 로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\mathscr{L}\{e^{-3t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt$$

$$= \left.\frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s+3}, \quad s > -3$$

위의 결과는 $s+3>0$, 즉 $s>-3$ 에 대하여 $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+3)t}=0$ 로부터 얻어진다. ❑

예제 4 정의 4.1 의 사용

$\mathscr{L}\{\sin 2t\}$을 구하라.

풀이 정의 4.1과 부분적분을 이용하여

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\sin 2t\,dt = \frac{-e^{-st}\sin 2t}{s}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{2}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos 2t\,dt$$

$$= \frac{2}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos 2t\,dt, \quad s > 0$$

$\lim_{t\to\infty} e^{-st}\cos 2t\,dt = 0,\ s > 0$ sin $2t$의 Laplace 변환

$$= \frac{2}{s}\left[\frac{-e^{-st}\cos 2t}{s}\Bigg|_0^{\infty} - \frac{2}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\sin 2t\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\mathscr{L}\{\sin 2t\}$$

을 얻는다. 양변의 $\mathscr{L}\{\sin 2t\}$에 관해 정리하면

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}, \quad s > 0$$

이다. ❑

■ $\mathscr{L}$은 선형변환이다 함수의 합에 대한 적분은 $s > c$에 대해 각각의 적분이 수렴할 때

$$\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\,dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

이므로

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \mathscr{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) \qquad (3)$$

이 된다. (3)의 성질로부터 $\mathscr{L}$은 **선형변환**(linear transform)이라고 말한다. 예를 들어 예제 1과 2로부터

$$\mathscr{L}\{1 + 5t\} = \mathscr{L}\{1\} + 5\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2}$$

EXAMPLE 3.1

Let $f(t) = e^{at}$, with a any real number. Then

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[f](s) = F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{(a-s)t}\,dt = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^k \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)k} - \frac{1}{a-s}\right] \\
&= -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

provided that $a - s < 0$, or $s > a$. The Laplace transform of $f(t) = e^{at}$ is $F(s) = 1/(s-a)$, defined for $s > a$. ■

EXAMPLE 3.2

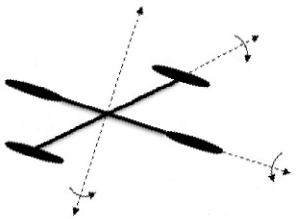
Let $g(t) = \sin(t)$. Then

$$\mathfrak{L}[g](s) = G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin(t)\,dt$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}\sin(t)\,dt$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-ks}\cos(k) + se^{-ks}\sin(k) - 1}{s^2+1}\right] = \frac{1}{s^2+1}.$$

$G(s)$ is defined for all real s. ■



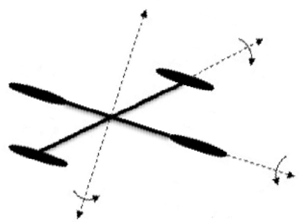
정리 4.1 기본함수의 변환

(a) $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

(b) $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}},\ n = 1, 2, 3, \ldots$ (c) $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s - a}$

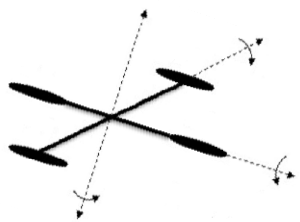
(d) $\mathscr{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$ (e) $\mathscr{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$

(f) $\mathscr{L}\{\sinh kt\} = \dfrac{k}{s^2 - k^2}$ (g) $\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$



f	$\mathcal{L}_t[f(t)](s)$	conditions
1	$\frac{1}{s}$	
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n \in \mathbb{Z} \geq 0$
t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\Re[a] > -1$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\omega \in \mathbb{R}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > \lvert \Im[\omega] \rvert$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert \Re[\omega] \rvert$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert \Im[\omega] \rvert$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a + \lvert \Im[b] \rvert$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$b \in \mathbb{R}$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}	

http://mathworld.wolfram.com/LaplaceTransform.html



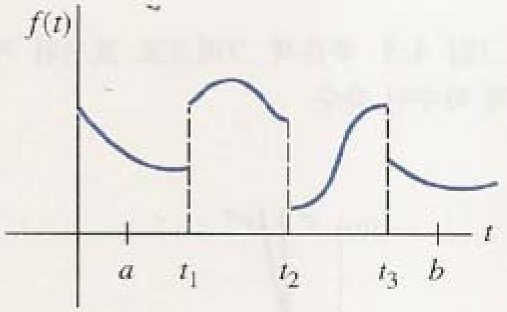


그림 4.1 조각별로 연속인 함수

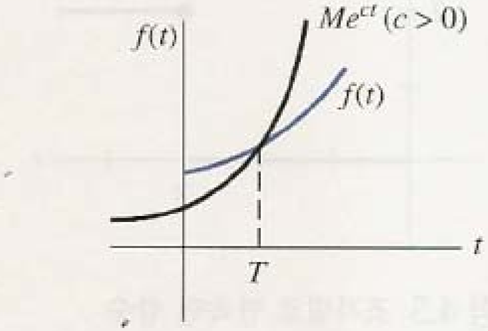
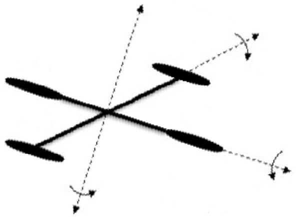


그림 4.2 지수적 차수인 함수 f

정의 4.2 **지수적 차수**

모든 $t > T$에 대하여 $|f(t)| \le Me^{ct}$을 만족시키는 상수 c, $M > 0$, $T > 0$이 존재하면 함수 f는 **지수적 차수**(exponential order) c라고 말한다.



정리 4.2 $\mathscr{L}\{f(t)\}$가 존재하기 위한 충분조건

$f(t)$가 $[0, \infty)$에서 조각별로 연속이고 지수적 차수 c일 때, $s > c$에 대하여 $\mathscr{L}\{f(t)\}$가 존재한다.

증명 정적분을 두 구간의 적분의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt = I_1 + I_2$$

적분 I_1은 $e^{-st}f(t)$가 연속인 구간에서의 적분들의 합으로 쓸 수 있으므로, I_1은 존재한다. 또 f는 지수적 차수 c를 가지므로 $t > T$에 대하여 $|f(t)| \le Me^{ct}$을 만족시키는 상수 $c, M > 0, T > 0$이 존재한다. 그러므로

$$|I_2| \le \int_T^\infty \left|e^{-st}f(t)\right| dt \le M\int_T^\infty e^{-st}e^{ct}\,dt = M\int_T^\infty e^{-(s-c)t}\,dt = M\frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}$$

이 $s > c$에 대하여 성립한다. 위 식에서 $\int_T^\infty Me^{-(s-c)t}\,dt$가 수렴하므로 $\int_T^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt$도 수렴함을 알 수 있다. 따라서 $s > c$에 대하여 I_2도 존재함을 알 수 있다. I_1과 I_2가 존재하므로, $s > c$에 대하여 $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$가 존재한다. ❑