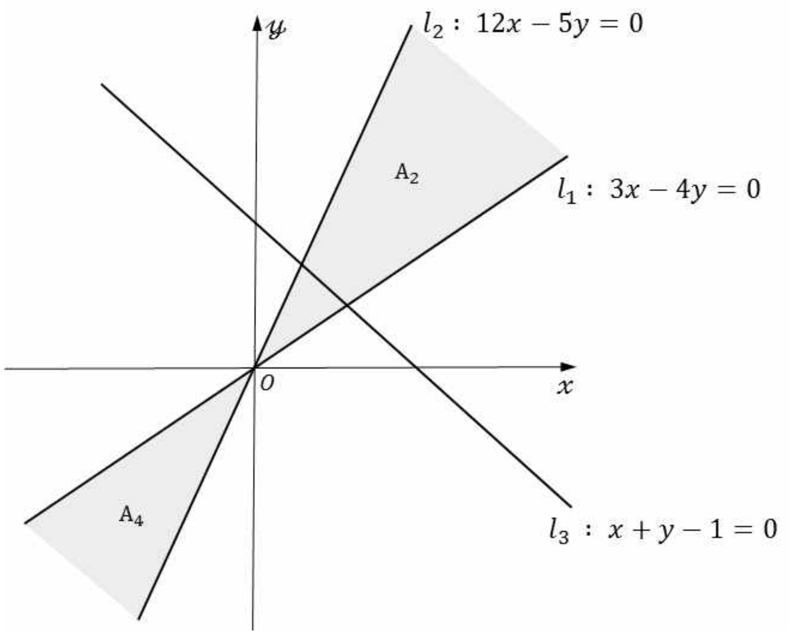
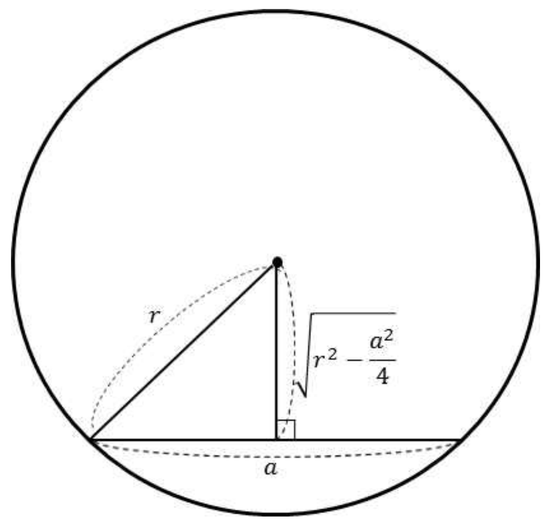
한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

의예-1번





제시문의 조건을 만족하는 원의 중심점을 (x,y), 반지름을 r이라 하고,
점과 직선사이의 거리공식을 적용하면,

$$\frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\ \frac{|12x-5y|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\ \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}\quad\left(r>\frac{a}{2},r>\frac{b}{2}\right)$$

이 성립한다.

위의 세 식들을 연립하여 $\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 에 대한 2차방정식을 유도하여 $\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 의 값을 살펴보도록 한다.

1. $(x,y)\in A_4$ 이면 $3x-4y=5\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$, $12x-5y=-13\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 이므로 두 식을 연립하면

$x=-\frac{7}{3}\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$, $y=-3\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 이다.

따라서 $|x+y-1|=\left|\frac{16}{3}\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+1\right|=\sqrt{2}\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}$ 이 성립한다.

위의 등식에서 양변에 3을 곱한 후 제곱하면,

$$256\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)+96\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+9=18\left(r^2-\frac{b^2}{4}\right)=18\left(r^2-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2-b^2}{4}\right)$$ 이므로

$$238\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)+96\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+9\left(1+\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\right)=0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$X=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 으로 놓으면 위의 방정식은 다음과 같이 변환된다.

$$238X^2+96X+\frac{9}{2}(2+b^2-a^2)=0 \ \cdots\cdots (1)$$

물음의 원이 존재하려면 위의 방정식은 양의 실수해를 가져야 하는데, 1차항의 계수가 양수이므로,
양의 실수해가 존재한다면 단 한개만 가져야하고 이는 $2+b^2-a^2<0$ 일 때만 가능하다. …… ★

$\therefore 2+b^2-a^2<0$

2. $a=2.57$, $b=1.06$ 이면 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 이고 $a+b>1.5$, $a-b>1.5$ 이므로 $a^2-b^2>2$ 이다.
따라서 $a=2.57$, $b=1.06$ 이면 문항 1에서 도출된 조건을 만족시키는데,
★에 의해 제시문의 원들 중 중심이 영역 A_4 의 내부에 있는 원은 1개이다.

3. $(x,y)\in A_2$ 이면 $3x-4y=-5\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}$, $12x-5y=13\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}$ 이므로, 두 식을 연립하면

$x=\dfrac{7}{3}\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}$, $y=3\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}$ 이다. ...... (2)

따라서 $|x+y-1|=\left|\dfrac{16}{3}\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}-1\right|=\sqrt{2}\sqrt{r^2-\dfrac{b^2}{4}}$,

$256\left(r^2-\dfrac{a^2}{4}\right)-96\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}+9=18\left(r^2-\dfrac{b^2}{4}\right)=18\left(r^2-\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2-b^2}{4}\right)$,

$238\left(r^2-\dfrac{a^2}{4}\right)-96\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}+9\left(1+\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)\right)=0$

$X=\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}$ 으로 놓으면 다음의 2차방정식을 얻는다.

$238X^2-96X+\dfrac{9}{2}(2+b^2-a^2)=0$ ...... (3)

한편 $(x,y)\not\in A_4$ 이므로 문항 1 에서 도출된 조건에 의해 $2+b^2-a^2\geq 0$ 이 성립해야한다.
그러므로 방정식(3)의 양인 실수해는 다음의 두 가지 경우로 나누어서 구할 수 있다.

경우 1) $2+b^2-a^2=0$ 일 때

$238X^2-96X+0=0$ 이므로 $\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}=X=\dfrac{48}{119}$ 이고,

이를 식 (2)에 대입하면 $x=\dfrac{16}{17}$, $y=\dfrac{144}{119}$ 이다.

case 2) $2+b^2-a^2>0$ 일 때

문항에서는 중심이 영역 A_2 안에 있는 원이 단 하나 존재하도록 a, b 가 선택되었다 했으므로,
방정식 (3) 의 양의 실수해는 하나만 존재해야한다. 방정식 (3) 의 상수항은 양수이고 일차항의 계수가 음수이므로 양의 실수해가 하나만 존재하기 위해서는 방정식(3)은 중근을 가져야한다.

따라서, $\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}=X=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{96}{238}=\dfrac{24}{119}$ 이 성립해야하고,

이를 식(2)에 대입하면

$x=\dfrac{8}{17}$, $y=\dfrac{72}{119}$

∴ 문항에서 요구하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{16}{17},\dfrac{144}{119}\right)$ 이거나 $\left(\dfrac{8}{17},\dfrac{72}{119}\right)$ 이다.